NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	CARRERA:
Firma		

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serÃ¡n corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en **SU** sección.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- Apagar y guardar sus celulares.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

CORRECCIóN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \\ 1 & 1 & 1+k \end{pmatrix} \quad X = (x\ y\ z)^t \quad B = (0\ \ -1\ \ 1)^t.$

a) **[10 pt]** Calcular el $det(A)$ y determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que A sea invertible.

b) **[8 pt]** Para $k=-1$ Encontrar A^{-1} y calcular $C = det(2A) + det(A^t) + det(A^{-1})$

c) Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema $A \cdot X = B$

I) **[5 pt]** Tenga única solución.

II) **[7 pt]** Tenga infinitas soluciones y para ese valor de k entregue la solución general.

III) **[5 pt]** No tenga solución.

Solución:

a) $\underbrace{|A| = k^3 + 3k^2}_{5pt}$. Luego A es invertible para todo $k \neq 0, k \neq -3$

5 puntos

b)
- Para $k=-1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

4 puntos

- $C = 8 \cdot 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{37}{2}$

4 puntos

c) Escalonado el sistema tenemos que :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+k & 1 \\ 1 & 1+k & 1 & -1 \\ 1+k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{13}(-1-k)}{\xrightarrow{E_{12}(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+k & 1 \\ 0 & k & -k & -2 \\ 0 & -k & -k^2-2k & -1-k \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+k & 1 \\ 0 & k & -k & -2 \\ 0 & 0 & -k^2-3k & -3-k \end{array}\right)$$

Luego

I) Única solución: $k \neq 0, k \neq -3$.

5 puntos

II) Infinitas Soluciones $k = -3$.

3 puntos

Solución general : $S : \{\left(x, x+\frac{1}{3}, x-\frac{1}{3}\right), x \in \mathbb{R}\} = \{\left(z+\frac{1}{3}, z+\frac{2}{3}, z\right), z \in \mathbb{R}\} = \{\left(y+\frac{1}{3}, y, y-\frac{2}{3}\right), y \in \mathbb{R}\}$

4 puntos

III) Si solución $k = 0$.

5 puntos

2) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

   a) **[5 pt]** Calcule $2\left[(A^t - B)^{-1}\right]^t$

   b) **[15 pt]** Encuentre explícitamente la matriz $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en la ecuación:

$$(AX - I_2)^t - [B^{-1} \cdot (X^{-1})^t]^{-1} = I_2$$

Solución:

a) $\underbrace{(A^t - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{2pt} \Longrightarrow \underbrace{2\left[(A^t - B)^{-1}\right]^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{3pt}$

b)

$$\begin{aligned} (AX - I_2)^t - [B^{-1} \cdot (X^{-1})^t]^{-1} &= I_2 \\ X^tA^t - I_2 - X^tB &= I_2 \\ X^t(A^t - B) &= 2I_2 \\ X^t &= 2(A^t - B)^{-1} \end{aligned}$$

5 puntos

$$\begin{aligned} X &= \left[2(A^t - B)^{-1}\right]^t \\ X = 2\left[(A^t - B)^{-1}\right]^t &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5+5 puntos

3) **[5 pt]** Un usuario de Whatsapp pertenece a tres grupos: amigos, vecinos y fútbol. Contando los integrantes de los grupos de amigos y vecinos su número resulta ser el triple de fútbol y si hubiera un contacto más en el grupo de vecinos, su número igualaría al triple de amigos. Además entre los tres grupos hay 300 personas.
Plantee **SIN RESOLVER** el sistema que permite encontrar la cantidad de integrantes de cada grupo.

Solución:
$x =$ Cantidad de contactos en el grupo de amigos.
$y =$ Cantidad de contactos en el grupo de vecinos.
$z =$ Cantidad de contactos en el grupo de fútbol.

Luego el sistema que entrega solución al problema es:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3z \\ y + 1 &= 3x \\ x + y + z &= 300 \end{aligned}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ 3x - y &= 1 \\ x + y + z &= 300 \end{aligned}\right|$$

5 puntos